INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1976. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N. B. — 1° *Dans tout ce problème, consacré à des applications géométriques de l'analyse combinatoire, on se bornera, chaque fois, à envisager le cas le plus général de la figure étudiée, et, sous peine de courir le risque d'y gaspiller un temps considérable, on n'abordera pas la discussion des cas particuliers.*

2° *La partie* I *est sans incidence sur la suite du problème. La partie* IV *peut se traiter indépendamment de tout le reste, exception faite de la dernière question.*

3° *Le symbole* Log x *désigne le logarithme népérien de* x.

PREMIÈRE PARTIE

1° Dans un plan, on donne n droites arbitraires. On suppose qu'il n'y en a pas deux parallèles, ni trois concourantes.

Quel est le nombre $P_1(n)$ des régions planes déterminées par ces n droites ? Combien y en a-t-il qui sont finies ? qui sont infinies ? On notera respectivement ces nombres $P'_1(n)$ et $P''_1(n)$.

$P_1(n)$, $P'_1(n)$, $P''_1(n)$ sont des polynômes en n . On indiquera les zéros réels de ces polynômes, lorsque ceux-ci existent — ces zéros étant, dans tous les cas, des entiers relatifs très simples — ainsi que la décomposition de chaque polynôme en produit de facteurs réels du premier ou du second degré.

2° Dans l'espace usuel à trois dimensions, on donne n plans arbitraires. On suppose qu'il n'y en a pas deux parallèles, ni trois parallèles à une même direction de droites, ni quatre concourants en un même point.

Quel est le nombre $P_2(n)$ des régions de l'espace déterminées par ces n plans ? Combien y en a-t-il qui sont finies ? qui sont infinies ? On notera respectivement ces nombres $P'_2(n)$ et $P''_2(n)$.

$P_2(n)$, $P'_2(n)$, $P''_2(n)$ sont des polynômes en n dont on donnera, pour chacun d'eux, la décomposition en produit de facteurs du premier ou du second degré.

DEUXIÈME PARTIE

1° On donne dans un plan n points A_i ($n \geqslant 4$) tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. En joignant ces points deux à deux, on obtient des droites dont on suppose qu'il n'en existe pas trois concourantes en un point autre que les A_i . On précise que si deux des droites sont parallèles, leur point commun à l'infini est compté comme un point d'intersection à distance finie.

Ces droites ont en commun les n points A_i donnés et d'autres points dont on demande le nombre $Q(n)$.

$Q(n)$ est un polynôme en n dont tous les zéros sont réels. Indiquer ces zéros et donner la factorisation de $Q(n)$.

.../...

2° On considère maintenant un polygone plan (P) non régulier, à n sommets notés A_1 , A_2 , ... A_n (avec $n \geqslant 4$). On rappelle que, dans un polygone :

— Les sommets A_1 , A_2 , ... A_n sont énoncés dans un ordre déterminé, fixé une fois pour toutes;

— On appelle côtés les droites joignant deux sommets consécutifs, diagonales les droites joignant deux sommets non consécutifs (il est entendu que A_n et A_1 sont traités comme consécutifs).

On note :

— $R_1(n)$ le nombre des points d'intersection des diagonales de (P) autres que les sommets;

— $R_2(n)$ le nombre des points d'intersection des côtés de (P) autres que les sommets;

— $R_3(n)$ le nombre des points d'intersection d'un côté de (P) et d'une diagonale de (P), autres que les sommets.

On demande de calculer $R_1(n)$, $R_2(n)$, $R_3(n)$ en fonction de n.

On supposera pour traiter cette question :

— qu'il n'existe ni couple de diagonales parallèles, ni couple de côtés parallèles, ni couple d'un côté et d'une diagonale parallèles;

— qu'il n'existe ni triplet de trois diagonales, ni triplet de deux diagonales et un côté, ni triplet d'une diagonale et deux côtés, ni triplet de trois côtés, concourant en un point distinct des sommets.

$R_1(n)$, $R_2(n)$, $R_3(n)$ sont des polynômes en n. On indiquera les zéros réels de ces polynômes, lorsque ceux-ci existent, ainsi que la décomposition de chaque polynôme en produit de facteurs réels du premier ou du second degré.

3° On fait de plus l'hypothèse que (P) est *convexe* et on conserve toutes les autres hypothèses tendant à exclure l'étude des cas particuliers.

Quel est le nombre $S(n)$ des points d'intersection des diagonales de (P), autres que les sommets, *intérieurs* au polygone (P) ? Ce nombre est un polynôme en n, que l'on factorisera.

Soit :

$$f(n) = \frac{S(n)}{R_1(n)}$$

Étudier les variations de $f(n)$ lorsque n croît de 4 à $+\infty$.

TROISIÈME PARTIE

1° On donne dans un plan un polygone *convexe* (P) à n côtés ($n \geqslant 4$). On mène *toutes* les diagonales de ce polygone, et on suppose que (P) n'a pas trois diagonales concourantes en un point intérieur à (P) [les sommets n'étant pas considérés, bien entendu, comme des points intérieurs à (P)].

En combien de régions l'intérieur de (P) est-il subdivisé par l'ensemble des diagonales ? [On notera $T(n)$ ce nombre.] Quel est le nombre $T_1(n)$ des régions ayant un côté commun avec la frontière de (P) ?

Quel est le nombre $T_2(n)$ des régions ayant un sommet commun, *sans avoir de côté commun*, avec la frontière de (P) ? Quel est le nombre $T_3(n)$ des régions n'ayant aucun point commun avec la frontière de (P) ?

Pour chacun des quatre polynômes en n, $T(n)$, $T_1(n)$, $T_2(n)$, $T_3(n)$, on mettra en évidence les zéros réels, puis on donnera la factorisation du polynôme en produit de facteurs réels du premier ou du second degré.

2° *Les candidats porteront toute leur attention sur le fait que le point de vue adopté dans cette question est complètement différent de celui adopté à la question précédente.*

On considère encore un polygone plan *convexe* (P) à n côtés ($n \geqslant 4$). On décompose (P) en *triangles* en utilisant pour ce faire une partie des diagonales de (P), *les sommets de chaque triangle étant tous des sommets de* (P). Une telle opération n'utilise naturellement qu'*une partie* des diagonales de (P).

L'étude du cas où $n = 4$ permet de mieux préciser ce qui précède. Soit $A_1 A_2 A_3 A_4$ un quadrilatère convexe. On peut le décomposer :

— Soit en deux triangles $A_1 A_2 A_3$ et $A_1 A_3 A_4$ en utilisant la diagonale $A_1 A_3$;

— Soit en deux triangles $A_1 A_2 A_4$ et $A_2 A_3 A_4$ en utilisant la diagonale $A_2 A_4$, et chacune des décompositions n'utilise qu'une seule des diagonales.

n désignant donc un entier quelconque tel que $n \geqslant 4$, on appelle V_n le nombre de façons distinctes de réaliser une décomposition du type décrit ci-dessus (ainsi, d'après ce qui précède, $V_4 = 2$).

On demande de calculer V_n *en fonction de n.*

On pourra pour cela raisonner comme suit :

.../...

On évaluera V_{n+1} en considérant les décompositions auxquelles appartiennent divers triangles qui ont pour côté un côté déterminé du polygone, et V_n en considérant les décompositions auxquelles appartiennent les diagonales issues d'un sommet déterminé. La comparaison des résultats obtenus donnera la formule de récurrence :

$$V_{n+1} = \frac{4n-6}{n} V_n$$

QUATRIÈME PARTIE

On se propose maintenant de donner du nombre V_n obtenu à la partie III une expression asymptotique valable lorsque $n \to +\infty$. Pour cela, on opérera comme il est indiqué ci-dessous.

1° Montrer que la suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n!} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

admet une limite finie, strictement positive, l. On pourra pour cela poser :

$$y_n = \operatorname{Log} x_n$$

et étudier la série de terme général $u_n = y_{n+1} - y_n$.

2° On pose, n désignant un entier positif ou nul :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

Montrer directement que la suite de terme général I_n est strictement décroissante et que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

3° Former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.

En déduire une expression de I_n. On distinguera explicitement les deux cas $n = 2p$, $n = 2p+1$, p désignant un entier.

De l'inégalité :

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}$$

déduire que $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \to 1$ si $p \to +\infty$.

4° Déduire de ce qui précède que :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{p \to +\infty} \frac{(2.4.6....2p)^2}{[1.3.5....(2p-1)]^2 (2p+1)}$$ (formule de Wallis)

5° Utiliser la formule de Wallis pour calculer la limite dont l'existence a été établie au IV. 1°.

6° Revenant au nombre V_n de la partie III, montrer que, lorsque $n \to +\infty$, l'expression $\frac{n^{\frac{3}{2}} V_n}{2^{2n}}$ a une limite finie, k, strictement positive. Quelle est la valeur de k ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail